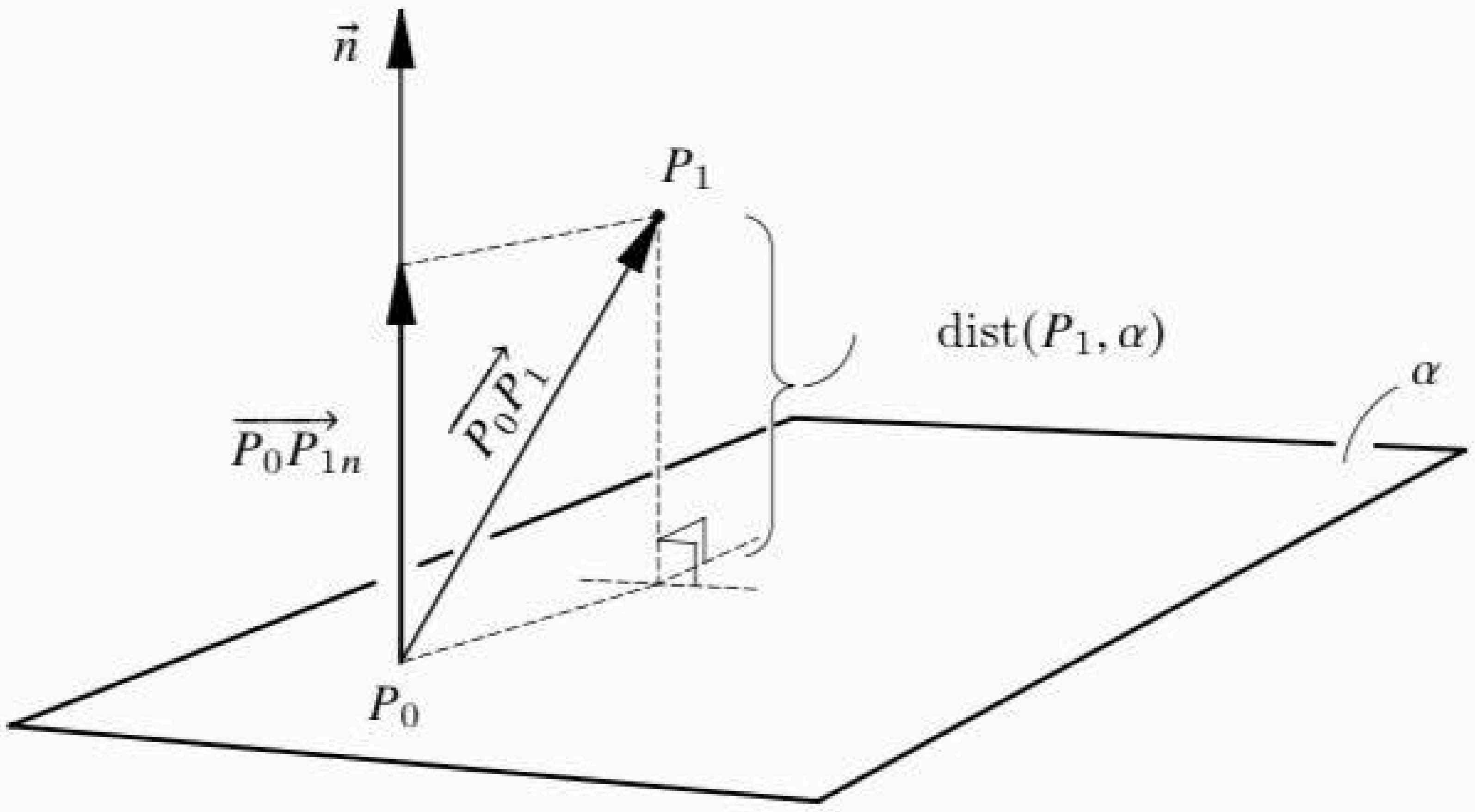
Afstand fra punkt til plan

Sætning. Den vinkelrette afstand fra et punkt P_1 (i rummet), til en plan α, er givet ved

$$\operatorname{dist}(P_1,\alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Bevis. Vi ønsker at beregne afstanden fra P_1 til α. For at bestemme denne afstand, vælges et vilkårligt punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, som allerede ligger i planen α. Vi kan herefter danne en vektor mellem P_0 og P_1. Denne vektor kaldes $\overrightarrow{P_0P_1}$ og dens koordinater kan findes ved at tage koordinaterne til P_1 og derfra trække koordinaterne til P_0. Vi har altså $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$. Planen α har en normalvektor $\vec{n}$ der står vinkelret på planen. Denne normalvektor er valgt tegnet så den starter i punktet P_0. Normalvektorens koordinater er lig med koefficienterne i ligningen for planen, altså $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Situationen er skitseret på figuren nedenfor.



Det ses, at vi ved at projicere vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ ind på normalvektoren $\vec{n}$ får en vektor $\overrightarrow{P_0P_{1n}}$, hvis længde er lig med den søgte afstand $\operatorname{dist}(P_1,\alpha)$ fra punktet P_1 til planen α. Med andre ord er $\operatorname{dist}(P_1,\alpha) = |\overrightarrow{P_0P_{1n}}|$.

Vi kan altså beregne $\operatorname{dist}(P_1,\alpha)$ ved at beregne længden $|\overrightarrow{P_0P_{1n}}|$ af projektionsvektoren $\overrightarrow{P_0P_{1n}}$ ved brug af formlen for længden af projektionsvektoren $\vec{a_b}$ af en vektor $\vec{a}$ projiceret ned på en vektor $\vec{b}$, givet ved

$$|\vec{a_b}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

Denne formel benyttes nu på projektionsvektoren $\overrightarrow{P_0P_{1n}}$, og vi får

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{P_0P_{1n}}| &= \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \\
&= \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} && \text{Udregn prikprodukt og indsæt } |\vec{n}| \\
&= \frac{|ax_1+by_1+cz_1-ax_0-by_0-cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} && \text{Ganger parenteser ud} \\
&= \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}
\end{aligned}$$

Den sidste lighed gælder, fordi P_0 ligger i planen α, og dermed opfylder den planens ligning $ax_0 + bx_0 + cz_0 + d = 0$, og dermed $d = -ax_0 - bx_0 - cz_0$.

Da $|\overrightarrow{P_0P_1}_n|$ netop var den søgte afstand, har vi altså som ønsket fundet, at

$$\mathrm{dist}(P_1, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

Resume. For at udlede formlen for afstanden fra et bestemt punkt i rummet til en plan i rummet, udnyttes først at vi forestiller os, at vi kender et punkt der ligger i planen. Vi danner nu en vektor fra punktet i planen til det bestemte punkt i rummet, og projicerer denne vektor ind på en normalvektor til planen. Længden af denne projektionsvektor er lig med den søgte afstand.

Bemærkning. Vi bemærker at formlen for afstanden fra et punkt i rummet til en plan i rummet, er strukturmæssigt identisk med formlen for afstanden mellem et punkt i planen og en ret linje i planen. Der er blot tilføjet en ekstra dimension i det rumlige bevis. Dette er selvfølgelig ikke overraskende, da man anvender præcis samme metode i de to udledninger: Man finder blot længden af en projektionsvektor!