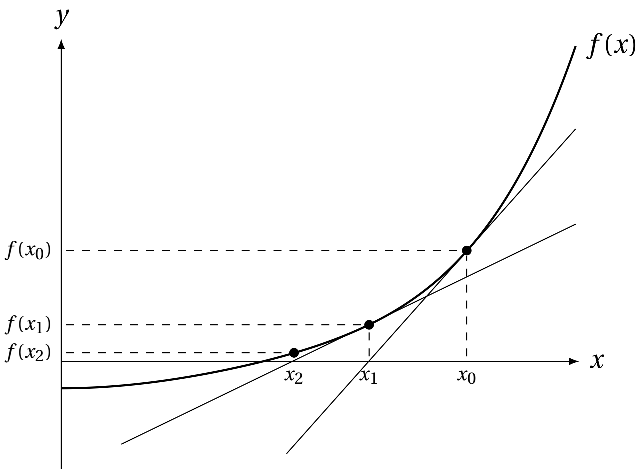
7 Differensligninger

7.1 Newton-Raphsons metode

Newton-Raphsons metode er en iterativ proces, der bruges til at finde nulpunkter for en funktion f. Med andre ord, ønsker vi at finde en x-værdi, således at ligningen $f(x) = 0$ er opfyldt. Metoden bruges ofte, når det ikke er muligt at finde nulpunkter analytisk. Eksempelvis er det ikke muligt, at isolere x i udtrykket $x - \cos x = 0$. I stedet bruger vi tangentens nulpunkt, eller skæring med x-aksen, til at finde funktionens nulpunkt.



Figur 7.1: *Newton-Raphsons metode.*

Metoden går ud på, at man begynder med at gætte på et nulpunkt x_0. I punktet på grafen for den tilhørende funktionsværdi $f(x_0)$ finder vi en tangent til funktionen. Punktet x_1, hvori tangenten skærer x-aksen, er nu vores nye gæt på et nulpunkt til funktionen. Denne fremgangsmåde gentages, indtil vi finder en x-værdi, som opfylder $f(x) = 0$.

Sætning 7.1

Lad f være en differentiabel funktion, og lad en startværdi x_0 være et gæt på et nulpunkt. Så vil Newton-Raphsons metode bestemme en talfølge, som er givet ved differensligningen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

hvor $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Bevis. Vi finder formlen for x_{n+1}, ved at udtrykke hældningen på tangenten på to måder. Fra differentialregning ved vi, at tangentens hældning i punktet x_0, er lig med $f'(x_0)$. Hældingen på en ret linje kan også findes, hvis man kender to punkter $(x_0, f(x_0))$ og $(x_1, f(x_1))$ på linjen. Så er hældningen givet ved $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$. Ved at sætte de to udtryk lig med hinanden, får vi

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Men fordi tangenten skærer x-aksen i x_1, så er $f(x_1) = 0$ og vi kan skrive

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Vi ganger først med $x_0 - x_1$ på begge sider

$$f'(x_0)(x_0 - x_1) = f(x_0).$$

Dernæst divideres med $f'(x_0)$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

og til sidst isoleres x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ved kun at kende x_0, kan vi altså finde x_1. Gentager vi processen med x_1, får vi

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Vi finder altså et nyt nulpunkt for tangenten, kun ved hjælp af det foregående. Eller skrevet mere generelt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

■

Resume

Vi starter beviset, med at finde to udtryk for tangentens hældning i punktet x_0. Det ene kender vi fra differentialregningen, og det andet finder vi som tilvæksten på y-aksen, divideret med tilvæksten på x-aksen. De to udtryk sættes lig med hinanden, og vi isolerer x_1. Dette gentager vi rekursivt indtil vi kan opstille en generel formel, hvor den næste værdi af x_n kan findes ved hjælp af den forrige.

Bemærkning

Newton-Raphson metoden er en effektiv metode, da den typisk konvergerer hurtigt imod nulpunktet. Der findes dog eksempler på funktioner, hvor metoden ikke kan bruges. Eksempelvis hvis en funktion har en differentialkvotient $f'(x_n)$, som er lig 0. Så vil tangenten aldrig skære x-aksen, og det er dermed ikke muligt at bestemme en værdi for x_{n+1}.

7.2 Eulers metode

Givet en førsteordens differentialligning, vil det være at foretrække at finde en eksakt løsning til ligningen. Desværre er der tilfælde, hvor det kan være svært, eller umuligt, at finde en sådan løsning. Er det ikke muligt at finde løsningen, findes der metoder, som i stedet approksimerer en løsning. Det vil sige, at vi finder en løsning, som ligger tæt på den rigtige løsning. Eulers metode tilnærmer sig løsningen til en differentialligning ved hjælp af en startværdi og tangentlinjer.

Sætning 7.2

Lad en førsteordens differentialligning være givet ved $y' = g(x, y)$. Lad $f(x)$ være den entydige løsning med begyndelsesbetingelsen $f(x_0) = y_0$. Så er punkter på en approksimeret løsningskurve givet ved

$$x_n = x_{n-1} + h, \qquad y_n = y_{n-1} + h \cdot g(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

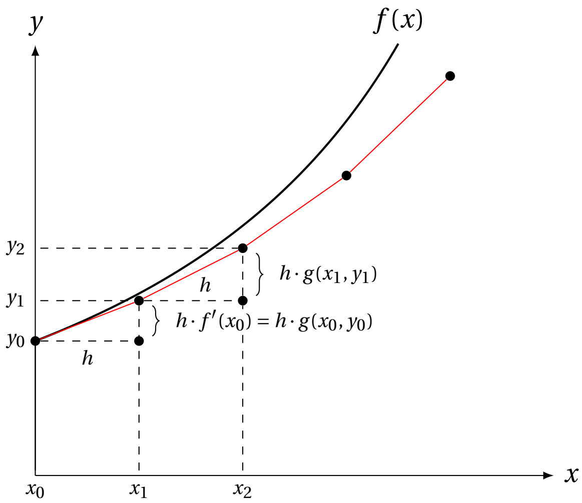
hvor h er en positiv skridtlængde.

Bevis. Vi ønsker at finde y-værdier, som ligger tæt på funktionsværdierne for løsningenskurven $f(x)$. Fordi vi ved, at differentialligningen har begyndelsesbetingelsen $f(x_0) = y_0$, kan vi lade

$$x_0 = x_0 \qquad y_0 = y_0,$$

være det første punkt, som vi finder. Vi kan nu ikke længere finde eksakte punkter på løsningskurven, men ved hjælp af tangenten i punktet (x_0, y_0), er det muligt at finde punkter, som er tæt på den eksakte værdi. Kigger vi på figuren, ser vi at den rette linje mellem punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) danner hypotenusen i en retvinklet trekant, hvor h er den vandrette katete. Ved at omskrive formlen for hældningen $f'(x) = \frac{y_1 - y_0}{h}$, kan den lodrette katete skrives som $h \cdot f'(x_0) = h \cdot g(x_0, y_0)$. Det nye punkt er altså

$$x_1 = x_0 + h \qquad y_1 = y_0 + h \cdot g(x_0, y_0).$$



***Figur 7.2:** Eulers metode.*

Gentager vi denne fremgangsmåde, hvor vi kontinuerligt bruger tangenten i det nyligt fundne punkt, får vi

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_0 & y_0 &= y_0 \\
x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + h \cdot g(x_0, y_0) \\
x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + h \cdot g(x_1, y_1) \\
&\vdots & &\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + h & y_n &= y_{n-1} + h \cdot g(x_{n-1}, y_{n-1}).
\end{aligned}
$$

■

Resume

Vi starter beviset med udgangspunkt i begyndelsesbetingelsen og tangenten gennem punktet. Ved hjælp af den givne differentialligning og tangentens hældning, kan vi finde en nyt punkt, som ligger tæt på den sande løsningskurve. Vi finder nu en tangent igennem det nye punkt, og gentager processen. Gør vi det tilstrækkeligt mange gange, indser vi, at der tegner sig et mønster, og vi kan opskrive det generelle udtryk, som er Eulers metode.

Bemærkning

Det er vigtigt, at huske på at Eulers metode ikke finder den entydige løsning til en differentialligning, men blot finder en tabel af punkter som tilnærmelsesvis ligner. Til trods for at metoden er meget simpel, så er den også meget effektiv, fordi metoden hele tiden tager højde for de små ændringer, der er i tangentens hældning.